В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

vzhegalov@yandex.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Речь идет об уравнениях вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} + \\ + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1, \\ \alpha_s \leqslant m_s,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad (1)$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – декартовы координаты точки x, $m = m_1 + \ldots + m_n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, m_s, α_s – целые неотрицательные числа, $m > 1$, $u(x)$ — искомая, а a_α, f — известные функции. Признаком, отличающим уравнения вида (1) от других уравнений с частными производными, является наличие первого слагаемого в правой части (1), представляющего собой доминирующую производную: все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Заметим, что подобный признак всегда имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно рассматривать (1) как класс уравнений с частными производными, наиболее близкий к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $m_s = 1$, $s = \overline{1,n}$, уравнение (1) вошло в математическую литературу под именем Л. Бианки, который одновременно с О. Николетти еще в 1895 г. [1], [2] рассматривал его как многомерное обобщение хорошо известного в математической физике уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f. \tag{2}$$

Впоследствии обнаружились различные прикладные аспекты обсуждаемых уравнений. Частные случаи (1) возникают при моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие [3], [4], [5]. Такие уравнения встречаются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах.

Среди указанных уравнений наиболее известными являются указанное И. Н. Векуа [6, с. 258] основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой сферической оболочки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + 2\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\delta E h R^2}{D}\right) u = \Phi\left(z, \zeta\right),$$

а также уравнения Аллера и Буссинеска–Лява

$$u_t = \left(au_x + bu_{xt}\right)_x, \quad u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} = 0. \tag{3}$$

Первое из них описывает процесс переноса почвенной влаги в зоне аэрации, а второе встречается при изучении продольных волн в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции. Недавно [7] было обнаружено, что второе уравнение (3) возникает также в связи с исследованием движения волн в периодических слоистых средах. К виду (1) относятся и поливибрационные уравнения Д. Манжерона.

После Л. Бианки и О. Николетти различные вопросы, связанные с уравнениями вида (1), изучали за рубежом H. Bateman, E. Lahaye, H. Hornich, D. Mangeron, M. Ogustoreli, D. Colton, S. Easwaran, V. Radochova, A. Corduneany, W. Rundell, M. Stecher и др. В нашей стране интерес к общему уравнению вида (1) при $n = 2$ возник в связи с задачами теории упругости. Статьи Н. И. Мусхелишвили (1919 г.) и И. Н. Векуа (1937 г.) положили начало целому направлению исследований в данной области, развивавшемуся в течение ряда десятилетий до работ А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова, О. М. Джохадзе и др. (примерно до 1987 г.). При $n > 2$ из публикаций на русском языке, появившихся до 1990 г., можно отметить работу [8], где ряд вопросов, относящихся к общему уравнению (1), рассматривался методами функционального анализа. Еще раньше (1956, 1958 г.г.) вышли работы М. К. Фаге [9], [10]. Во второй из них, автор, отмечая, что “Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали” представил вариант метода Римана, более соответствующий современному уровню строгости рассуждений.

В 90-х годах в Казани сформировалась группа, ведущая систематические исследования в обсуждаемой области (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миронов, О. А. Тихонова (Кощеева), А. А. Кунгурцев, Л. Б. Миронова и др.). Участниками группы был разработан новый вариант метода Римана для уравнения Бианки. Сохранилась лишь общая схема метода, а обе основные его составляющие были изменены: функция Римана определялась в предложенном варианте как решение некоторого интегрального уравнения, а основное дифференциальное тождество было взято в другой форме. Все это позволило получить более лаконичную и прозрачную схему решения задач Гурса и Коши, чем в работах предыдущих авторов. Кроме того, предложенный вариант оказался конструктивным в том смысле, что удалось выделить ряд новых случаев, когда решение может быть записано в явном виде. Для того же уравнения были поставлены и изучены новые характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях.

Далее естественно было перейти к построению теории уравнения (1) в общем случае, когда искомая функция содержит кратное дифференцирование по независимым переменным. Такие уравнения часто называют псевдопараболическими (первым такое название использовал Д. Колтон в 1972 г. [11]).

Отмеченная выше формальная близость обсуждаемых уравнений с классом линейных обыкновенных дифференциальных уравнений породила мысль о целесообразности попытки построить для частного случая (1)

$$L^n u + \sum_{k=1}^{n} a_k L^{n-k} u = 0, \quad Lu \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad a_k = \mathrm{const}, \tag{4}$$

аналог теории уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)} = 0. \tag{5}$$

И действительно, если общий вид решения для (4) обозначить через $U(x, A)$, где A – совокупность a_1, …, a_n, то оказалась верной формула

$$U(x, A) = \sum_{r=1}^{\kappa} \sum_{j=0}^{k_r - 1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r), \tag{6}$$

где $u_{rj}(x, \lambda_r)$ есть решения уравнений

$$Lu + \lambda_r u = 0, \quad r = 1, \ldots, \kappa, \tag{7}$$

а λ_r — корень кратности k_r уравнения

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = 0.$$

При этом

$$D_j = \sum \frac{|j|! x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m} \partial^{|j|}}{j_1! \ldots j_m! \partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_m^{j_m}}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

а символ $\sum$ понимается как в обобщенной формуле бинома Ньютона: нужно взять сумму всевозможных слагаемых указанного вида, $|j| = j_1 + \ldots + j_m$. Следует полагать D_0 равным оператору тождественного преобразования, $D_{-j}u \equiv 0$, $j = 1, 2, \ldots$.

Нетрудно убедиться, что при $n = 1$ (6) дает хорошо известную классическую формулу общего решения уравнения (5).

Позже был разработан аналог метода неопределенных коэффициентов для неоднородного уравнения (4) с правой частью специального вида.

Все вышеупомянутые результаты были отражены в монографии [12], вышедшей в 2001 г. В [12] рассматриваемые уравнения назывались "со старшими частными производными". Здесь же мы используем представляющийся нам теперь более подходящим термин "с доминирующей частной производной", предложенный А. И. Кожановым.

Главной целью работы являлось распространение метода Римана на самый общий случай уравнения (1). Наконец, в 2005 г. было спрогнозировано и доказано [13] тождество, необходимое для решения задачи Гурса в общем случае уравнения

(1). В 2003 г. аналогичный результат анонсирован для задачи Коши, полный текст опубликован в 2006 г. [14].

Полученная формула решения задачи Гурса позволила распространить теорию характеристических задач с нормальными производными в граничных условиях со случая уравнения Бианки на общее псевдопараболическое уравнение (1).

С другой стороны, и для уравнения Бианки, и, тем более, для общего уравнения (1) оставались неисследованными целый ряд вопросов. К ним относились, например, задачи типа Дирихле, когда носителем граничных значений искомой функции являлся весь контур, определяющий рассматриваемую характеристическую область. В последнее время некоторые такие задачи удалось решить [15] благодаря привлечению нового для обсуждаемого направления метода априорных оценок. Начато исследование подобных задач и для нехарактеристических областей.

Уже пятьдесят лет (начиная с работ [16] – [18]) в теории уравнений с частными производными интенсивно исследуются задачи со смещениями в граничных условиях, называемые еще нелокальными. Долгое время все публикации на эту тему ограничивались случаем уравнения (2). В последнее десятилетие подобные задачи были рассмотрены Е. А. Уткиной для обобщенных уравнений Аллера и Буссинеска–Лява, а также начались исследования простанственных вариантов указанных задач (пока для уравнений Бианки при числе переменных $n = 3,\ 4$).

Все упомянутые выше задачи рассматривались при достаточно гладких коэффициентах уравнения (1). Однако, в математической физике встречаются уравнения вида (2) с сингулярными коэффициентами, наиболее известным из которых является уравнение Эйлера-Пуассона

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0.$$

При этом имеется общее представление решений данного уравнения, получаемое каскадным методом Лапласа. В связи с этим обстоятельством возникла идея о целесообразности попытки выделить из уравнений вида (1) с сингулярными коэффициентами такие случаи, которые с точки зрения метода Лапласа можно было бы рассматривать как аналоги уравнения Эйлера-Пуассона. Подобные аналоги были получены Е. А. Уткиной.

Интенсивный характер приобрел поиск новых возможностей решения уравнений вида (1) и граничных задач для них в явном виде. Здесь разрабатывались три подхода: факторизация уравнений с целью понижения их порядка вплоть до решения в квадратурах; выделение случаев построения в явном виде функций Римана; дальнейшее развитие метода каскадного интегрирования. Выделено значительное число уравнений, допускающих эффективную разрешимость. Можно ожидать, что указанные результаты найдут применение к решению в явном виде интегральных уравнений Вольтерра, в том числе с несколькими независимыми переменными (принципиальная возможность такого применения установлена В. И. Жегаловым).

Параллельно с этим изучались системы уравнений с доминирующими частными производными. Здесь разработан векторно-матричный аналог метода Римана для системы с кратными доминирующими производными общего вида. Поставлен ряд новых характеристических задач для подобных систем в пространствах R^n и исследован характер их разрешимости, для системы первого порядка изучена задача с нормальными производными в граничных условиях.

Задачи с нормальными производными в граничных условиях исследовались также для квазилинейного аналога уравнения Бианки и для уравнения Лиувилля.

В последние годы началось изучение обсуждаемых уравнений методами группового анализа. Здесь получены определенные результаты для уравнений третьего и четвертого порядка. Есть основания ожидать дальнейшего развития исследований в данном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bianchi L. *Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore* // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e natur (5). – 1895. – V. IV. – P. 89–99, 133–142.

2. Niccoletti O. *Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore* // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. sc. fis., mat. e natur (5). – 1895. — V. IV. – P. 330–337.

3. Фаге М. К. *Операторно-аналитические функции одной независимой переменной* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 227–268.

4. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 290 с.

5. Бондаренко Б. А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* – Ташкент: Фан, 1987. – 146 с.

6. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.

7. Сердюкова С. И. *Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 389. – № 3. – С. 305–309.

8. Ахиев С. С. *Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных начально-краевых задач математической физики.* – Баку: Азербайджанский гос. ун-т. – 1988. – 58 с.

9. Фаге М. К. *Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом* // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 5. – С. 780–783.

10. Фаге М. К. *Задача Коши для уравнения Бианки* // Матем. сборник. – 1958. – Т. 45. – № 3. – С. 281–322.

11. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Different. equations. – 1972. – V. 12. – No 3. – P. 559–565.

12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

13. Уткина Е. А. *К общему случаю задачи Гурса* // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 8. – С. 57–62.

14. Миронов А. Н. *Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в* R^n // Сибирский матем. журнал. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 584–594.

15. Уткина Е.А. *Характеристические граничные задачи для линейных уравнений высокого порядка со старшими частными производными.* Дисс. … докт. физ.-мат. наук. – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, 2011. – 263 с.

16. Жегалов В. И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1962. – Т. 122. – Кн. 3. – С. 3–16.

17. Бицадзе А. В., Самарский А. А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач* // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 185. – № 3. – С. 739–740.

18. Нахушев А. М. *О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 1. – С. 44–59.

Н. И. Жукова, К. И. Шеина

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижегородский государственный университет, n.i.zhukova@rambler.ru, kse51091@mail.ru

ГРУППЫ БАЗОВЫХ АВТОМОРФИЗМОВ КАРТАНОВЫХ СЛОЕНИЙ, НАКРЫТЫХ РАССЛОЕНИЯМИ

Рассматривается категория, в которой изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и их трансверсальную геометрию. Решается проблема существования и единственности структуры конечномерной группы Ли в группе *базовых автоморфизмов* $A_B(M,F) := A(M,F)/A_L(M,F)$, где $A(M,F)$ – группа автоморфизмов слоения (M,F), а $A_L(M,F)$ – группа автоморфизмов, отображающих каждый слой этого слоения на себя.

Мы исследуем группы базовых автоморфизмов картановых слоений, то есть слоений, допускающих трансверсальную картанову геометрию. Подчеркнем, что картановы слоения включают в себя такие широкие классы слоений как римановы, лоренцевы, псевдоримановы, трансверсально подобные, вейлевы, конформные, проективные слоения, а также слоения с трансверсальной линейной связностью.